数理解析研究所講究録
619巻 1987年 152-163

実解析族とNewton図形について

日本大学文理学部　鈴木正彦 (Masahiko Suzuki)

§0. 序

複素特異点論の分野では，超曲面の孤立特異点とその定義方程式のNewton図形との関係がArnol'd一派やその他の人々によって深く研究され，特異点の本質的な性質がNewton図形によく反影されることが知られている。例えば次の定理はその状況をよく説明している：

定理A (M. Oka [8])．複素解析関数の芽の複素解析族 $f_t(x,y)$ $(|t|<<1)$ のミルナー数がtに関係なく一定で $f_0(x,y)$ のNewton境界 $\Gamma(f_0)$ が x,y-軸と交わるとすると，原点の局所座標の複素解析族 $\phi_t(x,y)=(x(t),y(t))$ で次の条件を満足するものが取れる：

(i) $\phi_0(x,y)=(x,y)$ かつ $\phi_t(0,0)=(0,0)$

(ii) $\Gamma(f_t;\phi_t)$ (座標 ϕ_t のもとでのNewton境界) はtに関係なく一定

$f_t^{-1}(0)$ のミルナー数の不変性と位相型の不変性は同値（[6] 参照）なので定理Aは「位相型一定の族 $f_t(x,y)$ は適当な局所座標の族 $\phi_t(x,y)$ のもとで一定な Newton 境界をもつ」ということを意味すると考えてよい。この形の定理が実解析関数の実解析族に対して成立するかどうか考察すると，これには次のような反例があることがわかる：

例．実解析関数の実解析族 $f_t(x,y)=y^2+tx^3+x^5$ を考える。$f_t^{-1}(0)$ の位相型は明らかに一定であるが，いかなる局所座標の族も $f_t(x,y)$ の Newton 境界を一定にしない。

上の例は，実解析特異点の位相型に関する研究をするとき，Newton 境界には本質的な役割を期待できないことを示している。

T. C. Kuo は実解析特異点の間の同値関係として，blow-analytic equivalence を導入し，パラメタに沿って blow-analytic trivialization をもつような実解析関 の実解析族を研究した（[2] 参照）。さらに彼はこの概念を発展させ π-modified analytic trivialization（π-MAT）をパラメタに沿って持つ族や almost π-MAT をパラメタに沿ってもつ族の研究をした（[3], [4] 参照）

さて我々は次の結果に興味をもつ：

定理 B.（T. Fukui, E. Yoshinaga [7]）. $f(x;t)$ を $t \in I$（I は n-cube）でパラメトライズされた $x=(x_1,\dots,x_n)$ を変数とする非退化な実解析関数の族とする。そのとき，$\Gamma_+(f_t)$（f_t の Newton 多面形）からトーラス的埋め込みによって構成された proper analytic modification $\pi: X \to \mathbb{R}^n$ によって，$f(x;t)$ は I に沿って almost π-MAT をもつ。

この定理はかような族が almost π-MAT をもつための十分条件を Newton 図形の条件で与えている。

我々の得た結果を示す：

「二変数の実解析関数の 1-パラメタ族でパラメタに沿って blow-analytic trivialization をもつものに対して，定理 A と類似の結果が成立する（§2 の定理）」

この結果は実解析族が blow-analytic trivialization をもつための必要条件を与えるものである。このような必要条件として Newton 図形が使えるということは，Newton 図形がこのような実解析族の研究に本質的なかかわりをもつことを示す。

以下の節で，定義と結果の詳細を述べる。

§1. 定義

$f(x,y)$ を $0\in\mathbb{R}^2$ の近傍で定義された $f(0,0)=0$ なる実解析関数とする。原点中心の f の Taylor 展開を

$$f(x,y)=\sum a_{ij}x^iy^j$$

とする。

$\Gamma_+(f;(x,y)):=$ the convex hull of $\bigcup_{i,j}\{(i,j)\in\mathbb{R}_+^2 \mid a_{ij}\neq 0\}$

$\Gamma(f;(x,y)):=\Gamma_+(f;(x,y))$ の compact faces の和

とし，Γ_+，Γ を夫々，座標系 (x,y) に関する f の Newton 多角形，Newton 境界という。また

$$\Gamma(f;(x,y))\cap x\text{-軸},\ y\text{軸}\neq\emptyset$$

のとき，f は convinient であるという。

次に，$\mathbb{R}^2(u,v)$，$\mathbb{R}^2(u',v')$ を両方共 $\mathbb{R}^2$ のコピーとして，M を座標近傍 $\mathbb{R}^2(u,v)$，$\mathbb{R}^2(u',v')$ を $uv=v'$，$u'v=1$ で貼り合せた2次元の多様体とする。$\omega: M\to\mathbb{R}^2$ を

$$\omega(u,v)=(u,vu),\ \omega(u',v')=(u'v',v')$$

で定義する。ω を原点中心の $\mathbb{R}^2$ の blowing-up という。

N を2次元の実解析的多様体とし，$U(P)$ を $P\in N$ のまわりの座標近傍とする。$U(P)$ を $\mathbb{R}^2(x,y)$ と同一視する。写像

$$\omega|_{M-\omega^{-1}(0)}: M-\omega^{-1}(0)\longrightarrow \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\cong U(P)-\{P\}$$

で $N-\{P\}$ と M を貼り合わせて得られる実解析多様体を $\tilde{N}$ とする。 $\pi:\tilde{N}\longrightarrow N$ を次の図式を可換にする写像とする:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{N}-M & \hookrightarrow & \tilde{N} & \hookleftarrow & M \\ \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \pi & & \downarrow \omega \\ N-\{p\} & \hookrightarrow & N & \hookleftarrow & U(p) \cong \mathbb{R}^2(x,y) \end{array}.$$

上の$\pi:\tilde{N}\to N$をNのpを中心とする<u>blowing-up</u>という。

さて，我々は[2]におけるBATの定義を少し拡張した形で述べる。$I=[a,b]$とし，$\mathcal{U},\mathcal{V}$を$\tilde{N}$における$\pi^{-1}(p)$の開近傍とする。

$$H:\mathcal{V}\times I\longrightarrow\mathcal{U}\times I,\ (\tilde{z},t)\mapsto H(\tilde{z},t)$$

を次の性質をもつhomeomorphismとする；

(1) Hはt-level preserving；

(2) Hはbianalytic；

(3) Hは$\pi^{-1}(p)$を不変にする。

今，$U=\pi(\mathcal{U})$，$V=\pi(\mathcal{V})$とおくと，Hは$U\times I$と$V\times I$の間のt-level preserving homeo.を誘導する。これをH'とすると，H'は$\{p\}\times I$をpointwiseに固定する。このH'をp中心のIに沿った$N\times I$の<u>blow-analytic twisting</u>と呼ぶ。

次に，Uを$p\in N$の開近傍とし，$f(z,t)$を$U\times I$上で定義された実解析関数で$f(p,t)=0$なるものとする。このとき，p中心のIに沿った$N\times I$のblow-analytic twisting

H'が存在して，$f\circ H'$がt$\in I$に無関係になるならば，$f(q,t)$はp中心のIに沿った <u>blow-analytic trivialization</u> をもつという。

§2. 結果

Uを$p\in U\subset U(p)$なる$p\in N$の開近傍とし，$f(q,t)$を$U\times I$上で定義された実解析関数で$f(p,t)=0$をみたすものとする。以下，$f(q,t)$はpを中心としてIに沿って blow-analytic trivialization をもつと仮定すると，我々は次の補題と定理を得る：

補題1. $f_{0,\Delta_0}(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}\left(\sum_{i=0}^{\gamma}a_i x^{\gamma-i}y^{i}\right)$, $a_0a_\gamma\neq 0$ in U とする。そのとき，十分小さなtに対し，実解析関数 $\varepsilon(t)$, $\delta(t)$, $a_i(t)$ $(i=1,\dots,\gamma)$ が存在して次の条件をみたす：

(i) $f_{t,\Delta_t}(x,y)=(x-\delta(t)y)^{\alpha}(y-\varepsilon(t)x)^{\beta}\left(\sum_{i=0}^{\gamma}a_i(t)\cdot x^{\gamma-i}y^{i}\right)$ in U

(ii) $\varepsilon(0)=\delta(0)=a_i(0)=0$ $(i=1,\dots,\gamma)$

(iii) $(x-\delta(t)y),\ (y-\varepsilon(t)x)\nmid \sum a_i(t)x^{\gamma-i}y^{i}$ in $\mathbb{R}\{x,y\}$,

但し，$f_{t,\Delta_t}(x,y)=$ the initial part of $f_t(x,y)$。

補題2. $\Gamma(f_{t,\Delta_t};(x,y))=\Gamma(f_{0,\Delta_0};(x,y))$ $(\forall t\in I)$ で，$f_{0,\Delta_0}(x,y)$ は x (resp. y) の単独項を含まないとする。

そのとき，正数εと$\mathcal{N}$における$\pi^{-1}(p)$の開近傍$\mathcal{U}$が存在して，写像

$$f\circ(\pi|_{\mathcal{U}}\times id_{I_\varepsilon}):\mathcal{U}\times I_\varepsilon\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ I_\varepsilon=[-\varepsilon,\varepsilon]$$

が$\hat{\sigma}$(resp. $\tilde{\sigma}$)中心のI_εに沿った blow-analytic trivialization をもつ。但し，$\hat{\sigma}$(resp. $\tilde{\sigma}$)は$\mathcal{M}\subset\tilde{\mathcal{N}}$の座標近傍$\mathbb{R}^2(u,v)$ (resp. $\mathbb{R}^2(u',v')$)の原点を示す。

補題3. $\Gamma_+(f_t;(x,y))$の non-compact faces が$t\in I$に無関係であるとする。そのとき，

$$\Gamma(f_t;(x,y))=\Gamma(f_0;(x,y))\quad(|t|<<1).$$

上の3つの補題を用いて，次の定理が岡[8]の中の定理1.1の証明法とほとんど同じ方法で次の定理を得る。

定理. $f_0(x,y)$は convinient であるとする。そのとき，$p\in\mathcal{N}$のまわりの局所座標の実解析族$\phi_t(x,y)=(x(t),y(t))$が十分小さなtに対して存在して次をみたす：

(i) $\phi_t(0,0)=(0,0)$ & $\phi_0(x,y)=(x,y)$

(ii) $\Gamma(f_t;\phi_t)=\Gamma(f_0;(x,y))$.

証明は[10]を参照のこと。

§3. 終りに

原点の近傍で定義された(実)解析関数 $f(x,y)$ が

$$\partial f/\partial x=\partial f/\partial y=0 \Leftrightarrow (x,y)=0$$

をみたすとき f は原点を孤立特異点としてもつという。今

$$H(2,1):=\{f \mid f:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C},0),\ \text{complex analytic, 孤立特異点をもつ}\}$$

$$R(2,1):=\{f \mid f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R},0),\ \text{real analytic, 孤立特異点をもつ}\}$$

さらに

$$\mathcal{L}_H:=\{\varphi \mid \varphi:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C}^2,0),\ \text{bianalytic}\}$$

$$\mathcal{L}_R:=\{\varphi \mid \varphi:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),\ \text{bianalytic}\}$$

とおくと, $\mathcal{L}_H$ (resp. $\mathcal{L}_R$) は Lie-群として自然に $H(2,1)$ (resp. $R(2,1)$) に作用する。$f\in H(2,1)$ (resp. $R(2,1)$) の $\mathcal{L}_H$(resp $\mathcal{L}_R$) orbit は有限余次元である。$\mathfrak{m}$ を局所環 $\mathbb{C}\{x,y\}$ (resp. $\mathbb{R}\{x,y\}$) の極大イデアルとすると, このorbit に transversal な族が, $\varphi_i(x,y)$ $(i=1,\dots,\mu-1)$ を $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}(\partial f/\partial x,\partial f/\partial y)$ のベクトル空間としての generator として

$$f_t(x,y)=f(x,y)+\sum_{i=1}^{\mu-1}t_i\varphi_i(x,y)$$

で与えられる。以上の議論は一般変数でもよく, 野口-福田 初等カタストロフィー, 共立全書 に詳しい。 この transversal family のパラメタ空間を $f\in H(2,1)$, $R(2,1)$ に応じて

$$P_f^H := \{(t_1,\dots,t_{\mu-1}) \mid t_i \in \mathbb{C}\},\quad P_f^R := \{(t_1,\dots,t_{\mu-1}) \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

とおく。

$f, f' \in H(2,1)$ のとき

$f \sim f' \Leftrightarrow {}^{\exists}F_\lambda(x,y)$: topological に constant な analytic family s.t. $f = F_0$, $f' = F_1$.

$f, f' \in R(2,1)$ のとき

$f \sim f' \Leftrightarrow {}^{\exists}F_\lambda(x,y)$: λ に沿って blow-analytic trivialization をもつ real analytic family s.t. $f = F_0$, $f' = F_1$.

と定義する。そして, $f \in H(2,1)$, $R(2,1)$ に対して

$S_f^H := \{t \in P_f^H \mid f \sim f_t\}$ の 0 における germ

$S_f^R := \{t \in P_f^R \mid f \sim f_t\}$ —— 〃 ——,

とおく。

$f \in H(n,1)$ あるいは $R(n,1)$ が non-degenerate とは, f の $\Gamma(f)$ の任意の face γ への制限を f_γ としたとき $\partial f_\gamma/\partial x = \partial f_\gamma/\partial y = 0$ の解が $(\mathbb{C}^*)^2$ ($(\mathbb{R}^*)^2$) にないことをいう。Kushnirenko - 岡 ([5], [7]) の結果により complex analytic functions の族 $f_t(x,y)$ の Newton $\Gamma(f_t)$ が一定で, $f_0(x,y)$ が non-degenerate ならば, f_t の

ミルナー数は一定となる。これと定理Aから次が得られる：

定理A'. $f \in H(2,1)$ が convinient で non-degenerate であるとし，φ_i $(i=1,\dots,\mu-1)$ の中で $\Gamma_+(f)$ に属するものが $\varphi_k,\dots,\varphi_{\mu-1}$ であるとすると，S_f^H は滑らかな多様体で，

$$S_f^H := \{(0,\dots,0,t_k,\dots,t_{\mu-1}) \in P_f^H\}$$

この定理については[9]も参照のこと。このようなことから自然に次のような問題が考えられる。

問. S_f^R はいかなる集合(semi-analytic set etc.)か？
また，適当な $f \in \mathcal{R}(2,1)$ に対して具体的に S_f^R が決定できないか。

注意：S_f^H は一般には，constractible set (analytic sets の差) になることが知られている。

もし，S_f^R が semi-analytic 等になれば，§2の定理から，その次元は

$$\dim S_f^R \leq \Gamma_+(f) \text{ に属する } \varphi_i \text{ の数}$$

と評価される。

序に書いたように，complex analytic functions の

族については，位相型の不変性とミルナー数の不変性は同じであることがわかっている。そこで

問．blow-analytic trivialization をもつ族とミルナー数一定の族との間の関係は？

$f_t(x, y)$ が blow-analytic trivialization をもっても，ミルナー数が一定とならないような例はある。

例（小池敏司氏による） $t=0$ のまわりで

$$f_t(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + (1-t)y^4$$

を考える。これは x, y について同次なので Kuo [2] の結果から t に沿って blow-analytic trivialization をもつことがわかる。しかし

$$f_0 \text{ のミルナー数} = +\infty$$

$$f_t \quad -\text{〃}- \quad < +\infty \quad (t \neq 0)$$

である。

問．上の問を π-MAT をもつ族について考えよ。

references

[1]Fukui,T & Yoshinaga,E:The modified analytic trivialization of family of real analytic functions. Inv.math.82,467-477(1985)

[2]Kuo,T.C.:The modified analytictivialization of singularities. J.Math.Soc.Japan 32,605-614(1980)

[3]Kuo,T.C. & Ward,J.N.:A theorem on almost analytic equisingulalities. J.Math.Soc.Japan 33,471-484(1981)

[4]Kou,T.C.:On classification of real analytic functions. Inv.math. 82,257-262(1985)

[5]Koushnirenko,A.G.:Polyhedres de Newton et nombres de Milnor, Inv.math. 32,1-31(1976)

[6]Le Dung Trang & Ramanujan,C.P.:The invariance of Milnor's number implies the invariance of topological types. Am.J.Math.98,67-78 (1976)

[7]Oka,M:On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary. J.Math.Soc.Japan 31,435-450(1979)

[8]Oka,M:On the stability of the Newton boundary. Proc. of Symposia in Pure Math 40,259-268(1983)

[9]Suzuki,M:The stratum with constant Milnor number of a mini-transversal family of quasihomogeneous function of corank two. Topology 23,101-115(1984)

[10]Suzuki,M:The stability of the Newton boundary of a real analytic singularities trivialized analytically via the blowing-up. Preprint